

Correction du concours blanc de mathématiques

PARTIE I : ALGÈBRE

1. On a $X^3 - 3X + 1 = (X^2 + X - 2)(X - 1) - 1$ d'où $q(X^3 - 3X + 1) = X^2 + X - 2$. /1
2. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons Q_1 (resp. Q_2) et R_1 (resp. R_2) le quotient et le reste de la division euclidienne de P_1 (resp. P_2) par $X - 1$. On a $P_1 = Q_1(X - 1) + R_1$ et $P_2 = Q_2(X - 1) + R_2$ i.e. $P_1 + \lambda P_2 = (Q_1 + \lambda Q_2)(X - 1) + R_1 + \lambda R_2$. De plus, $\deg(R_1 + \lambda R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(\lambda R_2)) < 1 = \deg(X - 1)$. Par unicité du quotient dans la division euclidienne, le quotient de $P_1 + \lambda P_2$ par $X - 1$ est $Q_1 + \lambda Q_2$, autrement dit, $q(P_1 + \lambda P_2) = Q_1 + \lambda Q_2 = q(P_1) + \lambda q(P_2)$. /2
3. On note $\mathcal{C} = (1, X - 1, X^2 - 1, X^3 - 1, X^4 - 1)$.
 - (a) La famille $\mathcal{C}$ est une famille libre (car constituée de polynômes non nuls et échelonnés en degré) de $\mathbb{R}_4[X]$ constituée de $5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$ éléments. Ainsi, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. /1
 - (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X^n - 1 = (X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. /1
 - (c) $q(1) = 0, q(X - 1) = 1, q(X^2 - 1) = X + 1, q(X^3 - 1) = X^2 + X + 1$ et $q(X^4 - 1) = X^3 + X^2 + X + 1$. /1
4. (a) $\text{Im}(q) = \text{Vect}(q(\mathcal{C})) = \text{Vect}(1, X + 1, X^2 + X + 1, X^3 + X^2 + X + 1)$. La famille $(1, X + 1, X^2 + X + 1, X^3 + X^2 + X + 1)$ est donc génératrice de $\text{Im}(q)$. De plus, elle est libre (car constituée de polynômes non nuls et échelonnés en degré) donc c'est une base de $\text{Im}(q)$. /1
- (b) D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(q)) = 5 - \dim(\text{Im}(q)) = 1$. Or $1 \in \text{Ker}(q)$. D'où $\text{Ker}(q) = \text{Vect}(1)$. /1
- (c) On remarque que $1 \in \text{Im}(q) \cap \text{Ker}(q)$ ainsi $\text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(q)$ ne sont pas en somme directe et donc ils ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[X]$. /1
5. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
 - (a) $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. /2
 - (c) On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(q) P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. /1
 - (d) $\star \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est triangulaire supérieure dont un des coefficients diagonaux est nul.
 $\star \text{Ker}(q) \neq \{0\}$ donc q n'est pas un isomorphisme. Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ n'est pas inversible. /1
6. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \in \mathbb{R}_4[X]$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q(P)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ a_2 + a_3 + a_4 \\ a_3 + a_4 \\ a_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où $q(P) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + (a_2 + a_3 + a_4)X + (a_3 + a_4)X^2 + a_4X^3$. /1

PARTIE II : PROBABILITÉS

Soit $p \in [0, 1]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Jeu n°1 : on note (Ω, P) l'espace probabilisé qui modélise cette expérience aléatoire et N la variable aléatoire égale au nombre d'as obtenus à l'issue des n tirages. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons P_i l'évènement : "obtenir pile au i -ième tirage" et A_i l'évènement : "obtenir un as au i -ième tirage".

1. La famille $(P_i, \overline{P_i})$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales, on obtient $p_a = P(A_i) = P_{P_i}(A_i)P(P_i) + P_{\overline{P_i}}(A_i)P(\overline{P_i}) = \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}(1 - p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}(2 - p)$. /1
2. La variable aléatoire N compte le nombre de succès lors de n épreuves de Bernoulli indépendantes. Ainsi $N \sim \mathcal{B}(n, p_a)$. /1
3. Ainsi $E_1 = E(N) = np_a$. /1

Jeu n°2 : on garde les mêmes notations que pour le jeu n°1. De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si on a obtenu un as au i -ème tirage et 0 sinon, et on note $p_i = P(X_i = 1)$.

4. Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

(a) En procédant de la même façon que dans la question 1., on obtient $P_{(X_i=1)}(X_{i+1} = 1) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}(1-p) = \frac{1}{4}(1+p)$ et $P_{(X_i=0)}(X_{i+1} = 1) = \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{4}(2-p)$. /1

(b) La famille $((X_i = 1), (X_i = 0))$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $p_{i+1} = P(X_{i+1} = 1) = P_{(X_i=1)}(X_{i+1} = 1)P(X_i = 1) + P_{(X_i=0)}(X_{i+1} = 1)P(X_i = 0) = \frac{1}{4}(1+p)p_i + \frac{1}{4}(2-p)(1-p_i)$ i.e. $p_{i+1} = \frac{1}{4}(2p-1)p_i + \frac{1}{4}(2-p)$. /1

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x = \frac{1}{4}(2p-1)x + \frac{1}{4}(2-p) \iff (5-2p)x = 2-p \iff x = \frac{2-p}{5-2p}$. Notons $c = \frac{2-p}{5-2p}$. La suite $(p_k - c)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $\frac{2p-1}{4}$ d'où $p_i = \left(\frac{2p-1}{4}\right)^{i-1} (p_1 - c) + c = \frac{2-p}{5-2p} \left(1 - \left(\frac{2p-1}{4}\right)^i\right)$ /1

5. On a $N = \sum_{i=1}^n X_i$. D'où $E_2 = E(N) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n P(X_i = 1) = \sum_{i=1}^n p_i = \frac{2-p}{5-2p} \left(n - \frac{2p-1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{2p-1}{4}\right)^n}{1 - \frac{2p-1}{4}}\right)\right)$. /1

PARTIE III : ANALYSE

1. Notons g la fonction $g : t \mapsto t + \sin(t)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g'(t) = 1 + \cos(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, on remarque que g' s'annule uniquement en des points isolés d'où g est strictement croissante. Par ailleurs, $g(0) = 0$ d'où $g(t) > 0$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $g(t) < 0$ pour $t \in \mathbb{R}_-^*$. /1

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in [x, 2x]$, $g(t) \neq 0$ donc $f(x)$ est bien définie. Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$, pour tout $t \in [2x, x]$, $g(t) \neq 0$ donc $f(x)$ est bien définie. D'où f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$. /1

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, en utilisant le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ suivant $u = -t$, on obtient $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{t+\sin(t)} dt = \int_x^{2x} \frac{1}{-u+\sin(-u)} (-du) = \int_x^{2x} \frac{1}{u+\sin(u)} du = f(x)$. Donc f est paire. /1

4. Notons $\varphi : x \mapsto \int_1^{2x} g(t) dt$. Comme g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi' = g$. On remarque avec la relation de Chasles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, φ et f le sont également. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)}$ i.e. $f'(x) = \frac{1}{x+\sin(x)\cos(x)} - \frac{1}{x+\sin(x)} = \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{(x+\sin(x))(x+\sin(x)\cos(x))}$. /1

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente, $\text{signe}(f'(x)) = \text{signe}(\sin(x))$. D'où $\text{signe}(\cos'(x)) = -\text{signe}(f'(x))$. De plus, f' s'annule uniquement en des points isolés, d'où f a des variations opposées à celle de cosinus sur $\mathbb{R}_+^*$. /1

6. On a vu que g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissance de l'intégrale, f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. /1

7. (a) On a $t + \sin(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t$ d'où $\frac{1}{t+\sin(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. /1

(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt\right| = \left|\int_x^{2x} g(t) - \frac{1}{t} dt\right| \leq \int_x^{2x} \left|\frac{\sin(t)}{t(t+\sin(t))}\right| dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t(t+\sin(t))} dt$. /1

(c) Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $t + \sin(t) \geq \frac{t}{2} \iff \frac{t}{2} \geq -\sin(t)$. Si $t \geq 2$, $\frac{t}{2} \geq 1 \geq -\sin(t)$ d'où $t + \sin(t) \geq \frac{t}{2}$. /1

(d) Soit $x \in [2, +\infty[$, $\left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt\right| \leq \int_x^{2x} \frac{2}{t^2} dt = \frac{1}{x}$ d'où $f(x) = \underbrace{f(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_{=\ln(2)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(2)$ /1

8. (a) $t + \sin(t) = 2t + o(t)$ d'où $t + \sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2t$ d'où $\frac{1}{t+\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2t}$. /1

(b) Posons $a = \frac{1}{2}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{t+\sin(t)} = \frac{1}{2t} + \frac{1}{t+\sin(t)} - \frac{1}{2t}$. Or $\frac{1}{t+\sin(t)} - \frac{1}{2t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} o\left(\frac{1}{t}\right)$ donc il existe $\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ tel que : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varepsilon(t) = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{t+\sin(t)} = \frac{1}{2t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}$. /1

(c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\eta_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \in]0, 2\eta_\alpha]$, $|\varepsilon(t)| \leq \alpha$ d'où pour tout $x \in]0, \eta_\alpha]$, $[x, 2x] \subset]0, 2\eta_\alpha]$, et ainsi $\left|\int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right| \leq \int_x^{2x} \frac{|\varepsilon(t)|}{t} dt \leq \alpha [\ln(t)]_x^{2x} = \alpha \ln(2) \leq \alpha$. /1

(d) Soit $x \in]0, \eta_\alpha]$. $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{2t} dt + \int_x^{2x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt$. D'où $\left|f(x) - \frac{\ln(2)}{2}\right| \leq \alpha$. Conclusion : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2)}{2}$. /1

9. Comme f est paire, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2)}{2}$. De plus, $f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x \times \frac{x^2}{2}}{2x \times 2x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x}{8}$, par parité de f , $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. D'après les théorèmes

de prolongement par continuité et de la limite de la dérivée, f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. /2